نمونه سوالات میان ترم

ریاضی عمومی ۱

به نام خدا

امتحان میان ترم ریاضی ۱

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۰

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی:

---

۱. (الف) ثابت کنید (۱۰ نمره)

$$\left(\frac{\cot\alpha + i}{\cot\alpha - i}\right)^n = \frac{\cot n\alpha + i}{\cot n\alpha - i}.$$

(ب) معادله $z^8 + z^4 + 1 = 0$ را حل کرده و جواب‌های آن را به دست آورید. (۱۰ نمره)

۲. (الف) حاصل حد زیر را بیابید (۱۰ نمره)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(n)(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n)(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n)(n+n)}}.$$

(ب) k را چنان بیابید که تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^{\sin x} (1+\tan 2t)\,dt}{\tan x} & x \neq 0 \\ 3k & x = 0 \end{cases}$$

در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد. (۱۰ نمره)

۳. شعاع استوانه مستدیر قائمی را بیابید که در داخل کره‌ای به شعاع R محاط شده است و دارای بیشترین مساحت جانبی است. (۱۵ نمره)

۴. اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد به طوری که $g(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$ تابعی پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد، نشان دهید g' ریشه‌ای در $(0, 1)$ دارد. (۱۰ نمره)

۵. فرض کنید $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $f(0) = f(1)$. ثابت کنید که $a, b \in [0, 1]$ وجود دارند به قسمی که $a - b = \frac{1}{2}$ و $f(a) = f(b)$. (۱۵ نمره)

۱) الف :

$$\left(\frac{\cot\alpha+i}{\cot\alpha-i}\times\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)^n=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n}{(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))^n}=\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos n\alpha-i\sin n\alpha}\div\frac{\sin n\alpha}{\sin n\alpha}=\frac{\cot n\alpha+i}{\cot n\alpha-i}$$

ب)

$$Z^8+Z^4+1=0\longrightarrow Z^4=y\longrightarrow y^2+y+1=0\qquad \Delta=1-4=-3=3i^2$$

$$y=\frac{-1\pm i\sqrt3}{2}=-\frac12\pm\frac{\sqrt3}{2}i\longrightarrow\begin{cases}y_1=-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\\ y_2=-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_1=\cos\left(\frac{2\pi}{3\times4}+\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)\qquad k=0,1,2,3,$$

$$Z_2=\cos\left(\frac{4\pi}{3\times4}+\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)\qquad k=0,1,2,3$$

۲) الف)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+i)}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{i}{n})}}=\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac in}}$$

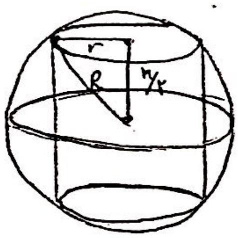
$$x_i=\frac in\longrightarrow\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac1n\ ,\quad f(x_i)=\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}$$

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx\ \xrightarrow[du=dx]{u=1+x}\ \int_1^2\frac{1}{\sqrt u}\,du=2\sqrt u\,\Big]_1^2=2(\sqrt2-1)$$

ب)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{\sin x}(1+\tan^2 x)}{\tan x}\\ 2k & x=0\end{cases}$$

۱۳)



$$R^2 = \frac{h^2}{4} + r^2 \Rightarrow h^2 + 4r^2 = 4R^2 \to h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

باید ماکزیمم تابع $2\pi r h$ را بدست آوریم.

برای راحتی کار می‌توان ماکزیمم تابع $S = r^2 h^2$ را بدست آورد

$$S = r^2 h^2 = r^2(4R^2 - 4r^2) = 4r^2R^2 - 4r^4 \Rightarrow \frac{ds}{dr} = 8R^2 r - 16r^3$$

$$\therefore r(R^2 - 2r^2) = 0 \to 2r^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

بهتر بود که در ماکزیمم خود $f = 2\pi r h$ را بدست آوریم اما دارد.

$$f = 2\pi r h = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} = 4\pi\sqrt{r^2R^2 - r^4} \to \frac{df}{dr} = 4\pi \frac{2rR^2 - 4r^3}{2\sqrt{r^2R^2 - r^4}} = \frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \ldots \quad r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

~~باید $f(\frac{\sqrt{2}}{2}R)$ ... ماکزیمم است~~

۱۵)

$$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(0) = f(1)$$

$$g: [0, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

تابع $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$ را در نظر می‌گیریم. g پیوسته است (چون تفاضل دو تابع پیوسته است)

$$g(0) = f(1/2) - f(0) \qquad g(\tfrac{1}{2}) = f(1) - f(1/2) \quad \xRightarrow{f(0) = f(1)} \quad g(0)\cdot g(1/2) \leq 0$$

الف) اگر $g(0)\cdot g(1/2) = 0$ پس $g(0) = 0$ یا $g(\frac{1}{2}) = 0$. فرض کنید $g(0) = 0$ در این صورت کافی است بگیریم

$a = \frac{1}{2}$ و $b = 0$ چون خواهیم داشت:

$$a - b = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

و

$$0 = g(0) = f(0 + \tfrac{1}{2}) - f(0) \Rightarrow f(\tfrac{1}{2}) = f(0)$$

اگر $g(\frac{1}{2}) = 0$ کافی است بگیریم $a = 1$ و $b = \frac{1}{2}$.

حال اگر $g(0)\cdot g(\frac{1}{2}) < 0$ پس $\exists c \in (0, \frac{1}{2})$ به طوری که $g(c) = 0$. در این صورت کافی است بگیریم

$a = c + \frac{1}{2}$ و $b = c$ و

$$0 < c < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq b \leq 1$$

و

$$0 < c + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 0 \leq a \leq 1$$

و

$$0 = g(c) = f(\underbrace{c + \tfrac{1}{2}}_{a}) - f(\underbrace{c}_{b}) \Rightarrow f(a) = f(b)$$

«بسمه تعالی»

امتحان میان ترم اول ریاضی عمومی ۱

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : وقت : ۱/۵ ساعت (۱۳۸۸/۷/۲۹)

سؤال ۱- ریشه های چهارم $Z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$ را بیابید.

سؤال ۲- مکان هندسی نقاط z را که در شرط زیر صدق می کنند بیابید:

$$\operatorname{Re}\left(1+i+\frac{1}{z+1}\right)+\operatorname{Im}\left(2i+\frac{1}{z+1}\right)=4$$

سؤال ۳-

الف : دنباله بازگشتی $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ را به شکل زیر می سازیم

$$x_1 = 1$$
$$x_{n+1} = \frac{6}{5-x_n}$$

ثابت کنید این دنباله همگراست و حد آن را بیابید.

ب : به ازاء چه مقادیر حقیقی از p سری های زیر همگراست (با ذکر دلیل)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, P^n}{(n+1)^n}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^p}$

سؤال ۴- سری های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ سه سری همگرا هستند و $a_n, b_n, c_n > 0$ ، ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n c_n)^{\frac{1}{3}}$ همگراست.

موفق باشید

$$z=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{1-(i\sqrt{3})^2}=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{1+3}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$ (۱

(۲

$$Re\left(1+i+\frac{1}{z+1}\right)=1+Re\left(\frac{1}{z+1}\right)=1+Re\left(\frac{1}{x+iy+1}\right)=$$

$$1+Re\left(\frac{x+1-iy}{(x+1)^2+y^2}\right)=1+\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$$

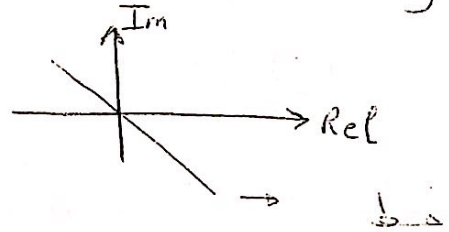
$$Im\left(2i+\frac{1}{z+1}\right)=Im\ 2i+\frac{1}{x+iy+1}=2+Im\left(\frac{x+1-iy}{(x+1)^2+y^2}\right)=$$

$$2+\frac{-y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}+2-\frac{y}{(x+1)^2+y^2}=4\Rightarrow\frac{(x+1)-y}{(x+1)^2+y^2}=1\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x+1)+y}=1\Rightarrow x+1+y=1\Rightarrow x+y=0\Rightarrow y=-x\xrightarrow{z=x+iy}$$

$$z=x-xi$$



$x_1=1,\ x_2=\frac{6}{4}\Rightarrow x_1<x_2$

۱) الف:

$\frac{4}{(10-x_n)^2}>0 \Rightarrow$ صعودی است

$x_n<x_{n+1}$

$x_{n+1}<x_{n+2}$

$\frac{4}{10-x_{n+1}}<2$

فرض کنیم $x_n \to l$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{۶}{۵ - x_n}$$

$$l = \frac{۶}{۵ - l} \longrightarrow l^۲ - ۵l + ۶ = ۰ \longrightarrow (l-۲)(l-۳) = ۰ \longrightarrow \boxed{l = ۲} \;\Big|\; \underset{\text{غ ق ق}}{l = +۳}$$

ب:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}\, n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Bigg(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}}_{e^{-1}}\Bigg)^{\frac{n+1}{n+2}}$$

$$= e^{-1}$$

$$\frac{1}{R} = e^{-1} \to R = e \qquad |\rho| < e$$

$$2)\ \sum \frac{\cos n\pi}{n^P} = \sum \frac{(-1)^n}{n^P}$$

اگر $P > ۰$ باشد آنگاه $a_n = \frac{1}{n^P}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$ پس طبق آزمون تناوب همگراست. اگر $P \leq ۰$ باشد آنگاه $\lim \frac{(-1)^n}{n^P} \neq ۰$ ⇐ سری واگراست

* سری را متناوب گویند هرگاه جملات آن یک در میان منفی و مثبت باشد یعنی $\sum (-1)^n a_n$

اگر دنباله $\{a_n\}$ نزولی و $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$ باشد، آنگاه سری $\sum (-1)^n a_n$ همگراست.

امتحان ماهانه اول ریاضی عمومی ۱

نام و نام خانوادگی :   شماره دانشجویی :   مدت : ۹۰ دقیقه (چهارشنبه ۱۳۸۹/۷/۲۱)

سؤال ۱- الف) فرض کنید b, a اعدادی حقیقی هستند و $f(x)=(x-a)^2(x-b)^2+x$

ثابت کنید $f(x)$ در نقطه ای مقدار $\frac{a+b}{2}$ را اختیار می کند.

ب) فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته است.

ثابت کنید که $g(x)=f(x-[x])$ درتمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است اگر و تنها اگر $f(0)=f(1)$. ($[x]$ جزء صحیح x است).

سؤال ۲- الف) فرض کنید α عددی حقیقی است که مضرب صحیح $\frac{\pi}{2}$ نمی باشد.

فرض کنید x_1 و x_2 ریشه های معادله زیر باشند:

$$x^2 tg^2\alpha + x tg\alpha + 1 = 0$$

ثابت کنید برای هر $n\in N$ داریم.

$$x_1^n + x_2^n = 2\cos(2n\frac{\pi}{3})\cot g^n\alpha$$

ب) ریشه های پنجم $\frac{-1-i}{2}$ را بیابید.

سؤال ۳- فرض کنیم n عددی صحیح و z عددی مختلط باشد به طوری که هردوی z , z^{-1} روی یک دایره به مرکز مبداء مختصات قرار دارند.

الف) ثابت کنید $|z|=1$ (یا معادلاً $z^{-1}=\bar{z}$) .

ب) نشان دهید که اگر $1+z^{2n}\neq 0$ آنگاه $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ عددی حقیقی است.

موفق باشید

حل سوال ۱

الف)

تعریف کنید $h(x)=f(x)-\frac{a+b}{2}$ و بدون هیچ خللی به کلیت فرض کنید $a\leqslant b$ بنابراین:

$h(a)=\frac{a-b}{2}$

$h(b)=\frac{b-a}{2}$

بنابراین $h(a)h(b)<0$

چون h تابعی پیوسته است از قضیه مقدار میانی لازم است که عددی چون c موجود باشد

که $h(c)=0$ یا به عبارت دیگر $f(c)=\frac{a+b}{2}$

حل سوال ۱
ب)

حال برعکس فرض کن g همه جا پیوسته باشد پس $\lim_{x\to 1^-} g(x)=g(1)$ نتیجه چون

$(*_1)$

داریم $g(1)=f(1-[1])=f$

$(*_2)$ $\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x-[x]) \xlongequal{\text{پیوستگی } f} f(\quad x-[x])$

$f(1^- - [1^-])=f(1)$

$*_1 , *_2 \Rightarrow f(1)=f(0$

دقت کنید که [illegible] $[x]$ [illegible] هیچ پیوسته [illegible] اضافه و [illegible] نقاط صحیح

پیوسته نیست لذا [illegible] انتخاب نقاط صحیح [illegible]

حال فرض کنیم $f(0)=f(1)$ و $n \in \mathbb{Z}$ عضو دلخواهی از اعداد صحیح باشد فرض کنید

$$x \to n^- \Rightarrow \lim_{x\to n^-} g(x) = \lim_{x\to n^-} f(x-[x]) = f(\lim_{x\to n^-} x-[x])$$

$$= f(n-n-1) = f(1) \quad (*_1)$$

و چون

$$g(n) = f(0) \Rightarrow \lim_{x\to n^-} g(x) = f(0) = f(1) = g(x)$$

مشابهاً

$$\lim_{x\to n^+} g(x) = g(n)$$

پس g تابعی پیوسته است

حل سوال ۳

الف) چون z و $\frac{1}{z}$ هر دو روی دایره‌اند پس $|z-0| = |\frac{1}{z}-0|$ بنابراین

$$|z| = \frac{1}{|z|} \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = \pm 1 \xrightarrow{\text{قابل قبول نیست}} -1$$

(چرا؟)

ب) چون $|z|=1$ پس $z = e^{i\theta}$

$$\frac{e^{in\theta}}{1+e^{2n\theta i}} = \frac{1}{(e^{-in\theta}+e^{in\theta})} \longrightarrow \text{حقیقی است}$$

از طرفی چون ، $e^{in\theta} + e^{-in\theta} =$ حقیقی $\Longrightarrow e^{-in\theta} = \cos n\theta - \sin n\theta$

$e^{in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta$

موفق باشید

بسمه تعالی

آزمون دوم ریاضی عمومی ۱

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

نام و نام خانوادگی | ۲۷ آبان ۱۳۸۸ | وقت: ۷۰ دقیقه

---

۱) مطلوبست محاسبه حد زیر

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x \cos 2x \cdots \cos nx}{x^2}$$

۲) نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را مشخص کنید هرگاه $f(0)=1$ و اگر $x \neq 0$، $f(x) = x[\frac{1}{x}]$.

۳) مساحت کمترین مثلثی رابیابید که از برخورد مماس بر منحنی $y = x^2 - 1$ در ربع چهارم با محورهای مختصات بدست می‌آید.

۴) فرض کنید تابع f روی $[0,1]$ پیوسته و روی $(0,1)$ مشتق پذیر باشد. ثابت کنید عددی مانند c یافت می‌شود که $0 < c < 1$ و

$$c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1).$$

$S = \frac{1}{2} x_1 |x_2|$

$y - b = (2a)(x - a)$

$2a x_1 + b = \ldots$

$\ldots + 2a^2 = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2} \xrightarrow{\text{Hop}} \frac{\sin x\cos 2x\cdots\cos nx+2\sin 2x\cos x\cdots+\cdots}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim\ \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1\times 1}\cos 2x\cdots\cos nx+\underbrace{\frac{2\sin 2x}{x}}_{2\times 2}\cos x\cdots\cos nx+\underbrace{\frac{3\sin 3x}{x}}_{3\times 3}\cos x\cos 2x\cdots\cos nx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)=\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{K=n}K^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

۲- ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه $x=0$ بررسی می‌کنیم.

طبق نامساوی معروف : $\frac{1}{x}-1\le [\frac{1}{x}]<\frac{1}{x}$

حال اگر $x>0$ $\quad 1-x\le x[\frac{1}{x}]<1$

و اگر $x<0$ $\quad 1-x\ge x[\frac{1}{x}]>1$

که وقتی $x\to 0$ طبق قضیه فشردگی $\lim_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]=1$ از طرفی $f(0)=1$

پس تابع در $x=0$ پیوسته است.

از طرفی تابع $f(t)=[t]$ در نقاط $t\in\mathbb{Z}$ پیوسته نیست

یعنی اگر $\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$ یعنی اگر $[\frac{1}{x}]=n-1$ $\quad \frac{1}{x}>n \rightarrow x<\frac{1}{n}$ $\quad x=\frac{1}{n}^-$

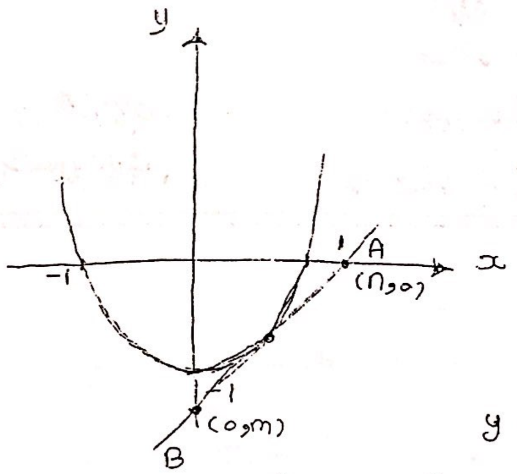
$n\in\mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}^-}x[\frac{1}{x}]=\frac{n-1}{n}\neq\lim_{x\to\frac{1}{n}^+}x[\frac{1}{x}]=1$$

۴- تابع $g(x)=x^2f(x)$

چون g روی $[0,1]$ پیوسته و روی $(0,1)$ مشتق‌پذیر است

پس طبق قضیه $c\in(0,1)$ $\quad g(1)-g(0)=g'(c)$



$n>1$

$m<-1$

$y=$

$$\text{شیب} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{m-0}{0-n} = -\frac{m}{n} \qquad S = \frac{1}{2}mn$$

$$y = -\frac{m}{n}x + m \qquad x^2 - 1 = -\frac{m}{n}x + m$$

$$x^2 + \frac{m}{n}x - (1+m) = 0$$

$$\Delta = 0 \leftarrow \quad x = \frac{-\frac{m}{n} \pm \sqrt{\frac{m^2}{n^2} + 4(1+m)}}{2}$$

$$\frac{m^2}{n^2} = -4(1+m) \rightarrow \frac{m^2}{-4(1+m)} = n^2 \rightarrow \frac{|m|}{\sqrt{-4(1+m)}} = |n|$$

$$n = \frac{-m}{\sqrt{-4(1+m)}} \qquad S^2 = \frac{1}{4}m^2n^2 \rightarrow S^2 = \frac{1}{4}\, m^2 \frac{m^2}{-4(1+m)}$$

$$\frac{dS^2}{dm} = \frac{-4m^3(1+m) + m^4}{(1+m)^2} = -3m^4 - 4m^3 = 0$$

$$-m^3(3m+4) = 0 \rightarrow m = -\frac{4}{3} \rightarrow n = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (۸۴/۱/۲۹)

پرسش ۱:

الف) اگر عدد مختلط z به صورت زیر تعریف شده باشد، مطلوبست محاسبه $|z^2|$:

$$z=(1+i)(1+i\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})\dots(1+i\sqrt{n})$$

ب) اگر $z=\frac{2}{1+i}+\frac{3}{1+i\sqrt{2}}+\dots+\frac{n+1}{1+i\sqrt{n}}$ باشد، مطلوبست محاسبه Re(z).

پرسش ۲: داریم $\sin\theta = \cos(\pi/2-\theta) \xrightarrow{\theta\to-\theta} -\sin\theta=\cos(\pi/2+\theta)$

اگر $z=(-1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^n$ و n یک عدد طبیعی باشد، مطلوبست محاسبه Re(z) و Im(z) برحسب تصاویر مختلف n.

پرسش ۳:

اگر $\lim_{x\to 1} f(x)=-5$ باشد:

الف) ثابت کنید که تابع f(x) در یک همسایگی عدد یک کراندار است.

ب) ثابت کنید که وجود دارد بازه بازی مانند I' شامل یک به طوری که مقدار تابع در این بازه منفی است.

پرسش ۴:

فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow R$ تابع دلخواهی باشد، به طوری که $f'(x)$ وجود داشته و به ازای هر x، $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f'(x)=0$ ثابت کنید که f روی بازه [a,b] اکیداً یکنواخت است.

پرسش ۵:

الف) نشان دهید که اگر تابع f در x=a مشتق‌پذیر باشد در این نقطه پیوسته است.

ب) ثابت کنید که تابع
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$
در a=۰ مشتق‌پذیر است اما مشتق این تابع $f'(x)$ در a=۰ پیوسته نیست.

۲) اگر $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-5$

الف) بنا بر تعریف حد، برای هر $\varepsilon>0$، $\exists\,\delta>0$: $|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)+5|<\varepsilon$

$\Rightarrow 1-\delta<x<1+\delta \Rightarrow -5-\varepsilon<f(x)<-5+\varepsilon$ که یعنی اینکه f در یک همسایگی ۱ کراندار است.

ب) با توجه به الف کافی است ε را طوری انتخاب کنیم که $0<\varepsilon<5$ در این صورت در همسایگی $|x-1|<\delta$ داریم:

$$-5-\varepsilon<f(x)<-5+\varepsilon<0$$

۱

الف) $z=(1+i)(1+i\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})\dots(1+i\sqrt{n})$

داریم که $|z^2|=|z|^2$ پس داریم:

باید $\bar{z}$ را تعیین کنیم $|z^2|=z\bar{z} \Rightarrow$

اگر

$\Rightarrow z=z_1z_2\dots z_n \Rightarrow \bar{z}=\overline{z_1z_2\dots z_n}=\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3\dots\bar{z}_n$

$\Rightarrow \bar{z}=(1-i)(1-i\sqrt{2})(1-i\sqrt{3})\dots(1-i\sqrt{n})$

$\Rightarrow |z|^2=z\bar{z}=\left[(1+i)(1+i\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})\dots(1-i\sqrt{n})\right]\times\left[(1-i)(1-i\sqrt{2})\right.$

$\left.(1-i\sqrt{3})\dots(1-i\sqrt{n})\right]=\left[(1+i)(1-i)\right]\left[(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})\right]\dots$

$(1+i\sqrt{3})\dots(1-i\sqrt{3})\Big|=\Big|(1+i\sqrt{n})(1-i\sqrt{n})\Big|(1+1)(1+2)(1+3)\dots(1+n)$

$\Rightarrow |z^2|=|z^2|=\bar{z}=2\times3\times4\times\dots(n+1)=(n+1)?$!

ب) $z=\dfrac{2}{1+i}+\dfrac{3}{1+i\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{n+1}{1+i\sqrt{n}}$

به راحتی می‌توان دید که هر کسر به صورت $\dfrac{m+1}{1+i\sqrt{m}}$ است که اگر قرار دهیم:

$z_m=1+i\sqrt{m}$

$\Rightarrow |z_m^2|=z_m\bar{z}_m=(1+i\sqrt{m})(1-i\sqrt{m})=1-i^2m=1+m$

$\Rightarrow z=\dfrac{z_1\bar{z}_1}{z_1}+\dfrac{z_2\bar{z}_2}{z_2}+\dots+\dfrac{z_n\bar{z}_n}{z_n}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\dots+\bar{z}_n$

$\Rightarrow z=(1-i)+(1-i\sqrt{2})+(1-i\sqrt{3})+\dots(1-i\sqrt{n})=n-i(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n})$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(z)=n \quad , \quad \mathrm{Im}(z)=-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n})$

۲

$z=(-1+\cos 2\theta°c+i\sin 2\theta°c)^n=(-1+1-2\sin 2\theta+2i\sin\theta\cos\theta)^n$

منفی است یا مثبت. از طرفی در نیز گفتیم که $f'(x)$ در بازه (a,b) موجود است، یعنی

منحنی $f'(x)$ پیوسته است.

به فرض در نقطه c_1، $f'(c_1)$ منفی باشد و در $c_2 > c_1$ $f'(c)$ مثبت باشد، البته جای

منفی و مثبت می‌تواند عوض شود:

پس با توجه به قضیه بولتزانو داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x = c_1 \Rightarrow f'(c_1) \le 0 \\ x = c_2 \Rightarrow f'(c_2) \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\vartheta d \in (c_1, c_2) \subset f'(d) = 0 \Rightarrow$$

خلاف فرض مسئله است. پس فرض ما نادرست بوده است. پس تابع f بر روی بازه

$[a,b]$ اکیداً یکنواخت است.

<u>۵</u>

الف) با توجه به تعریف مشتق‌پذیری داریم:

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) f(a)}{x - a} = \text{موجود}$$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) f(a)}{x - a} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) - f(a) = f'(a) \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) = f(a)$$

ب)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

برای مشتق تابع $f(x)$ در $x=0$ داریم که از تعریف حد استفاده می‌کنیم، پس داریم:

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$= (2\sin\theta)^n(-\sin\theta + i\cos\theta)^n = 2^n \sin^n\theta \times \left(\cos(\frac{x}{2}+\theta) + i\sin(\frac{x}{2}+\theta)\right)^n$$

$$= 2^n \sin^n\theta \times \left(\cos(\frac{nx}{2}+n\theta) + i\sin(\frac{nx}{2}+n\theta)\right) = 2^n \sin^n\theta \times \left(\cos(\frac{nx}{2}+n\theta) + i\sin(\frac{nx}{2}+n\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(z) = 2^n \sin^n\theta \cos\left(\frac{nx}{2}+n\theta\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(z) = 2^n \sin^n\theta \sin\left(\frac{nx}{2}+n\theta\right)$$

۳

الف) داریم که با توجه به تعریف:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -5$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists s > 0\ |x-1| < s \Rightarrow |f(x)-(-5)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x)+5| < \varepsilon \Rightarrow -5-\varepsilon < f(x) < -5+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu' < f(x) < \mu$$

که $\mu' = -5-\varepsilon$ و $\mu = -5+\varepsilon$ که در نتیجه به وضوح می‌توان دید که $f(x)$ در یک همسایگی s از یک کراندار است.

ب) به فرض در بالا قرار دهیم $\varepsilon = 1$، آنگاه داریم $-6 < f(x) < -4$ که به ازای $\varepsilon = 1$، δای وجود دارد که در آن بازه $f(x)$ کوچکتر از ٤ بادر اصل منفی گردد.

۴

$$f[a,b] \to R$$

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که تابع f روی [a , b] اکیداً یکنواخت نباشد و از طرفی چون $f'(x)$ در بازه (a , b) موجود است، پس در بعضی جاها $f'(x)$

چون $-1 \le \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \le 1$ است $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x \times \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = 0 \times A = 0$

پس کرانداراست، پس داریم: $\Rightarrow f'(0) = 0 =$ موجود

حال به ازای $x \neq 0$، $f'(x)$ را به دست می‌آوریم که می‌شود:

$$\Rightarrow f'(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2 \times \frac{-1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x^2} = \text{ناموجود}$$

پس چون $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ موجود نیست، پس $f'(0)$ پیوسته نیست، ولی موجود است $f'(0) = 0$.